Operatory w przestrzeniach L_p
Lista 1

Zad 1. Udowodnić *nierówność Younga*, tj. że dla każdych $a, b > 0$ oraz $p, q > 1$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mamy $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a^p = b^q$.

Zad 2. Udowodnić *nierówność Höldera*, tj. że dla dowolnych funkcji mierzalnych x, y na przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) oraz $p, q > 1$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zachodzi

$$\int_\Omega |xy| d\mu \leq \left(\int_\Omega |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |y|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Przy czym jeśli obie strony są skończone, to są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $|x|^p$ i $|y|^q$ są liniowo zależne prawie wszędzie (tj. istnieją liczby λ_1, λ_2, nie będące jednocześnie zerami, takie że $\lambda_1 |x|^p = \lambda_2 |y|^q$ μ-prawie wszędzie).

Zad 3. Udowodnić *nierówność Minkowskiego*, tj. że dla dowolnych funkcji mierzalnych x, y na przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) oraz $p \geq 1$ zachodzi

$$\left(\int_\Omega |x + y|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |y|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy albo obie strony są równe ∞ lub

a) jeśli $p = 1$, to "x i y są skierowane w tym samym kierunku", czyli $x \cdot \overline{y} \geq 0$ μ-prawie wszędzie,

b) jeśli $p > 1$, to "x i y są dodatnio proporcjonalne", tj. istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, nie będące jednocześnie zerami, takie że $\lambda_1 x = \lambda_2 y$ μ-prawie wszędzie.

Zad 4. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ i $p \geq 1$. Pokazać, że wzór $\|x\|_p = \left(\int_\Omega |x|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$ poprawnie definiuje normę na przestrzeni $L_p(\mu)$ funkcji całkowalnych w p-tej potędze, tj. funkcji $x : \Omega \to \mathbb{K}$ dla których $\|x\|_p < \infty$, gdzie funkcje równe sobie μ-prawie wszędzie utożsamiamy. Udowodnić, że przestrzeń $L_p(\mu)$ jest zupełna.

Zad 5. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenia z miarą. Pokazać, że zachodzi równość

$$\inf\{K > 0 : |x(t)| \leq K \text{ dla } \mu\text{-prawie wszystkich } t \in \Omega\} = \inf_{A \in \Sigma, \, \mu(A) = 0} \sup_{t \in \Omega \setminus A} |x(t)|.$$

Wspólną wartość oznaczamy przez $\|x\|_\infty = \sup \mathrm{ess}_{t \in \Omega} |x(t)|$ i nazywamy *supremum istotnym* funkcji x.

Zad 6. Pokazać, że supremum istotne $\|x\|_\infty = \sup \mathrm{ess}_{t \in \Omega} |x(t)|$ jest poprawnie zdefiniowaną normą na przestrzeni funkcji istotnie ograniczonych $L_\infty(\mu)$, tj. zbioru funkcji $x : \Omega \to \mathbb{K}$ dla których $\|x\| < \infty$, gdzie funkcje równe sobie μ-prawie wszędzie utożsamiamy. Udowodnić, że $L_\infty(\mu)$ jest zupełna.

Zad 7. Niech (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą skończoną. Pokazać, że dla dowolnych $1 \leq p \leq q \leq \infty$ zachodzą inkluzje

$$L_\infty(\mu) \subseteq L_q(\mu) \subseteq L_p(\mu).$$

Zad 8. Niech $\ell_p := L_p(\mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą na $\Omega = \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$. Udowodnić, że dla dowolnych $0 < p < q < \infty$ zachodzą właściwe inkluzje

$$\ell_p \subsetneq \ell_q \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell_\infty,$$

gdzie c_0 to przestrzeń ciągów zbieżnych do zera, a c to przestrzeń ciągów zbieżnych.

Zad 9. Niech $1 \leq p < q \leq \infty$ i λ miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Pokazać, że $L_p(\lambda) \not\subseteq L_q(\lambda)$ i $L_q(\lambda) \not\subseteq L_p(\lambda)$.

Zad 10. Dla dowolnej miary μ, pokazać, że jeśli $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, to $L_p(\mu) \cap L_q(\mu) \subseteq L_r(\mu)$. Ponadto, jeśli $x \in L_p(\mu) \cap L_\infty(\mu)$, to $\lim_{r \to \infty} \|x\|_r = \|x\|_\infty$.